# Průběh funkce

Lenka Baráková

19. října 2004

# Obsah

**Vyšetřete průběh funkce** $y = (x+1)e^x$

$$\boxed{y = (x+1)e^x}$$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$;

Definiční obor je celá množina $\mathbb{R}$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,

Dosadíme $x = 0$ do předpisu funkce $f(x)$ a dostaneme průsečík s osou $y$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,

$$(x+1)e^x = 0$$

Řešením rovnice $y = 0$ dostaneme průsečík s osou $x$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,

$$
\begin{aligned}
(x+1)e^x &= 0 \\
x+1 &= 0
\end{aligned}
$$

- Součin je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeden z činitelů.
- Činitel $e^x$ je vždy kladné číslo.

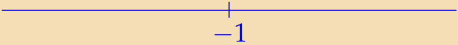
$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1, 0]$,

$$(x+1)e^x = 0$$
$$x + 1 = 0$$
$$x = -1$$

Průsečík s osou $x$ je $x = -1$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1, 0]$,

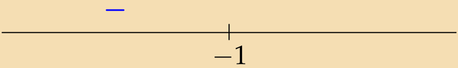
$$
\begin{aligned}
(x+1)e^x &= 0 \\
x + 1 &= 0 \\
x &= -1
\end{aligned}
$$




- Na osu $x$ zaneseme průsečík.
- Nemáme žádné body nespojitosti.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1, 0]$,

$$\begin{aligned}(x+1)e^x &= 0\\ x+1 &= 0\\ x &= -1\end{aligned}$$

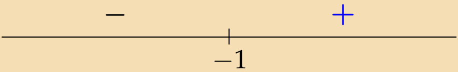



$f(-2) = (-2+1) \cdot e^{-2} = -e^{-2} < 0$

Funkční hodnota $f(-2)$ je záporná a protože se znaménko na intervalu $(-\infty, -1)$ nemůže změnit, je funkce záporná na celém tomto intervalu.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1, 0]$,

$$\begin{aligned} (x+1)e^x &= 0 \\ x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$




$f(-2) = (-2+1) \cdot e^{-2} = -e^{-2} < 0$
$f(0) = 1 > 0$

Funkce je kladná v $x = 0$, tedy také na $(-1, \infty)$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)e^x = \|\infty \cdot \infty\| = \infty$$

- Vypočteme limity v $\pm\infty$. Začneme limitou v $+\infty$.
- Platí $\infty + 1 = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)e^x = \|\infty \cdot \infty\| = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x+1)e^x = \|(-\infty) \cdot e^{-\infty}\| = \|(-\infty) \cdot 0\|$$

- Vypočteme limitu v $-\infty$.
- "Dosadíme" $x = -\infty$ a dostaneme $-\infty + 1 = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- Dostáváme neurčitý výraz $0 \times \infty$.
- K výpočtu tedy musíme použít jinou metodu.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)e^x = \|\infty\cdot\infty\| = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x = \|(-\infty)\cdot e^{-\infty}\| = \|(-\infty)\cdot 0\|$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^{-x}} = \left\|\frac{-\infty}{\infty}\right\|$$

- Přepíšeme výraz na zlomek $\boxed{e^x = \frac{1}{e^{-x}}}$. Limita je ve tvaru, kdy je možno použít L'Hospitalovo pravidlo.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)e^x = \|\infty\cdot\infty\| = \infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x &= \|(-\infty)\cdot e^{-\infty}\| = \|(-\infty)\cdot 0\| \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^{-x}} = \left\|\frac{-\infty}{\infty}\right\| \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}\end{aligned}$$

Použijeme L'Hospitalovo pravidlo (derivujeme zvlášť čitatel a jmenovatel). Funkci $e^{-x}$ derivujeme jako složenou.

$$(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = e^{-x}\cdot(-1)$$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)e^x = \|\infty \cdot \infty\| = \infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} (x+1)e^x &= \|(-\infty)\cdot e^{-\infty}\| = \|(-\infty)\cdot 0\| \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{e^{-x}} = \left\| \frac{-\infty}{\infty} \right\| \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -e^x
\end{aligned}$$

Zjednodušíme.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)e^x = \|\infty \cdot \infty\| = \infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} (x+1)e^x &= \|(-\infty) \cdot e^{-\infty}\| = \|(-\infty) \cdot 0\| \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{e^{-x}} = \left\| \frac{-\infty}{\infty} \right\| \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -e^x = \| - e^{-\infty}\| = 0
\end{aligned}$$

Dosadíme. Z grafu funkce vidíme, že $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \|e^{-\infty}\| = 0.$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,
Přímka $y = 0$ je asymptota se směrnicí pro $x \to -\infty$.

Plyne z toho, že $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^x = 0$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,
Přímka $y = 0$ je asymptota se směrnicí pro $x \to -\infty$.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)e^x}{x}$$

Pro $x \to \infty$ hledáme asymptotu se směrnicí ve tvaru $y = kx + q$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1, 0]$,

Přímka $y = 0$ je asymptota se směrnicí pro $x \to -\infty$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} e^x$$

Limitu rozdělíme na součin limit.

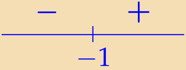
$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,
Přḿka $y = 0$ je asymptota se směrnicí pro $x \to -\infty$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} e^x = 1 \cdot \infty = \infty$$

Asymptota se směrnicí pro $x \to \infty$ neexistuje.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;




Vyšetříme chování derivace.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$$y' = (x+1)' \cdot e^x + (x+1) \cdot (e^x)'$$

Funkci $y = (x+1) \cdot e^x$ derivujeme jako součin:
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} y' &= {\color{red}(x+1)'} \cdot e^x + (x+1) \cdot {\color{green}(e^x)'} \\ &{\color{blue}=} {\color{red}1} {\color{blue}\cdot e^x + (x+1)} \cdot {\color{green}e^x} \end{aligned}$$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} y' &= (x+1)' \cdot e^x + (x+1) \cdot (e^x)' \\ &= 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x \\ &= e^x(1 + x + 1) \end{aligned}$$

Vytkneme $e^x$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

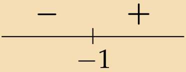
| $-$ | $+$ |
|---|---|
| $-1$ | |

$$
\begin{aligned}
y' &= (x+1)' \cdot e^x + (x+1) \cdot (e^x)' \\
&= 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x \\
&= e^x (1 + x + 1) \\
&= e^x (x+2)
\end{aligned}
$$

Zjednodušíme.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;




$y' = e^x(x+2)$;

Dostáváme derivaci.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$-$ $+$

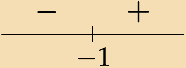
$-1$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

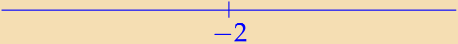
- Derivace je rovna nule právě tehdy, když $\boxed{(x+2) = 0}$, jelikož $e^x \neq 0$. Dostáváme stacionární bod $x = -2$.
- Dosadíme $f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2}$ a s pomocí kalkulátoru dostaneme $f(-2) \doteq -0.14$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;



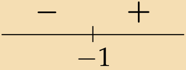

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$



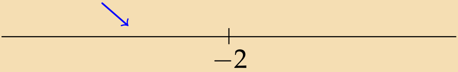

Na reálnou osu zaneseme stacionární bod. Nemáme žádné body nespojitosti.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;




$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$




Zvolíme např. $x = -3$ a dosadíme do první derivace: $y'(-3) = e^{-3}(-3+2) = -e^{-3} < 0$. Funkce v bodě $x = -3$ klesá a totéž platí na celém intervalu $(-\infty, -2)$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

| $-$ | $+$ |
|---|---|
| | $-1$ |

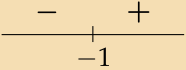
$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

| $\searrow$ | $\nearrow$ |
|---|---|
| | $-2$ |

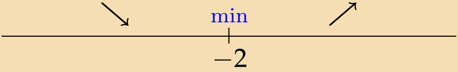
Dosazením $x = 0$ do první derivace máme
$y'(0) = e^0(0+2) = 2 > 0$. Funkce v bodě roste $x = 0$ a to také platí na celém intervalu $(-2, \infty)$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;




$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$




$\boxed{\text{V bodě } x = -2 \text{ má funkce lokální minimum.}}$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

$$y'' = e^x \cdot (x+2) + e^x \cdot 1$$

Spočteme $y''$. Derivujeme $y' = e^x \cdot (x+2)$ jako součin $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} y'' &= e^x \cdot (x+2) + e^x \cdot 1 \\ &= e^x(x+2+1) \\ &= e^x(x+3) \end{aligned}$$

Zjednodušíme.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0, 1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$-$ $+$

$-1$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$\searrow$ min $\nearrow$

$-2$

$y'' = e^x(x+3)$;

Máme druhou derivaci.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

$y'' = e^x(x+3)$; $y'' = 0$ pro $x = -3$, $f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$

- Hledáme bod, ve kterém platí $y'' = 0$. Protože $e^x$ je vždy různá od nuly, musí platit $(x+3) = 0$, proto $x = -3$.
- Hodnota funkce v bodě $x = -3$ je $f(-3) = (-3+1)e^{-3} = -2e^{-3} \doteq -0.01$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

$y'' = e^x(x+3)$; $y'' = 0$ pro $x = -3$, $f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \hline & -3 & \end{array}$$

Nakreslíme reálnou osu s bodem, kde je druhá derivace nulová. Nemáme žádný bod nespojitosti, proto se znaménko druhé derivace může měnit pouze v bodě $x = -3$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$-\quad\quad +$

$-1$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$\searrow \quad \text{min} \quad \nearrow$

$-2$

$y'' = e^x(x+3)$; $y'' = 0$ pro $x = -3$, $f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$

$\cap$

$-3$

Funkce je na intervalu $(-\infty, -3)$ konkávní, protože $-4 \in (-\infty, -3)$ a $y''(-4) = e^{-4}(-4+3) = -e^{-4} < 0$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

$y'' = e^x(x+3)$; $y'' = 0$ pro $x = -3$, $f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$

$$\begin{array}{ccc} \cap & & \cup \\ \hline & -3 & \end{array}$$

Funkce je konvexní na intervalu $(-3,\infty)$, protože $-2 \in (-3,\infty)$ a v bodě $x = -2$ je lok. minimum a $y''(-2) = e^{-2}(-2+3) = e^{-2} > 0$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou $y$ je $[0,1]$,průsečík s osou $y$ je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$-$ | $+$

$-1$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$\searrow$ min $\nearrow$

$-2$

$y'' = e^x(x+3)$; $y'' = 0$ pro $x = -3$, $f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$

$\cap$ in. $\cup$

$-3$

Bod $x = -3$ je tedy inflexní.

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cap & \text{in.} & \cup \\ \hline & -3 & \end{array}$$

$f(0) = 1$
$f(-1) = 0$

$f(-2) \doteq -0.14$
$f(-3) \doteq -0.01$

$f(+\infty) = \infty$
$f(-\infty) = 0$

Shrneme dosažené výpočty.

$- \quad +$

$-1$

$\searrow$ min $\nearrow$

$-2$

$\cap$ in. $\cup$

$-3$

$f(0) = 1$

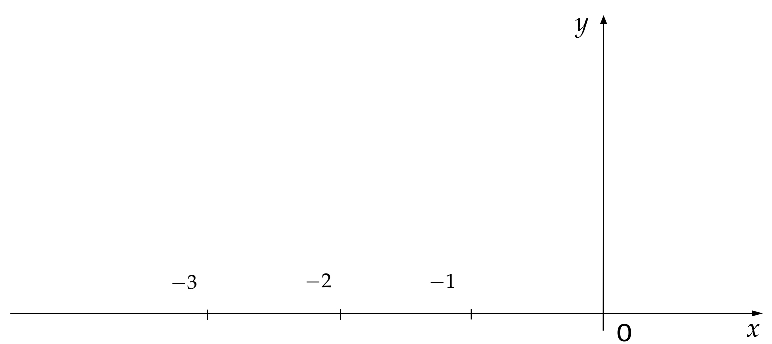
$f(-1) = 0$

$f(-2) \doteq -0.14$

$f(-3) \doteq -0.01$

$f(+\infty) = \infty$

$f(-\infty) = 0$




Nakreslíme souřadný systém.

$-$ $+$

$-1$

$\searrow$ min $\nearrow$

$-2$

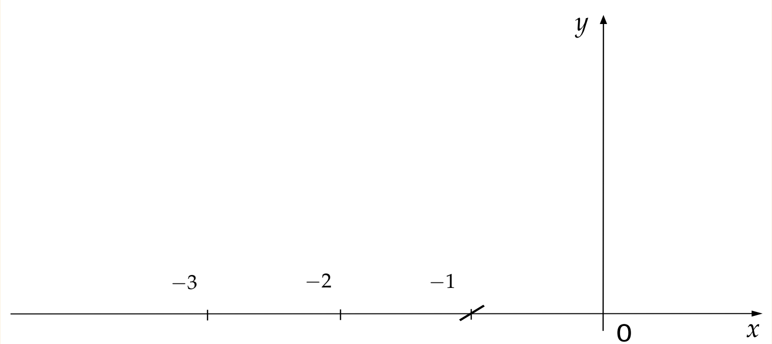
$\cap$ in. $\cup$

$-3$

$f(0) = 1$
$f(-1) = 0$

$f(-2) \doteq -0.14$
$f(-3) \doteq -0.01$

$f(+\infty) = \infty$
$f(-\infty) = 0$



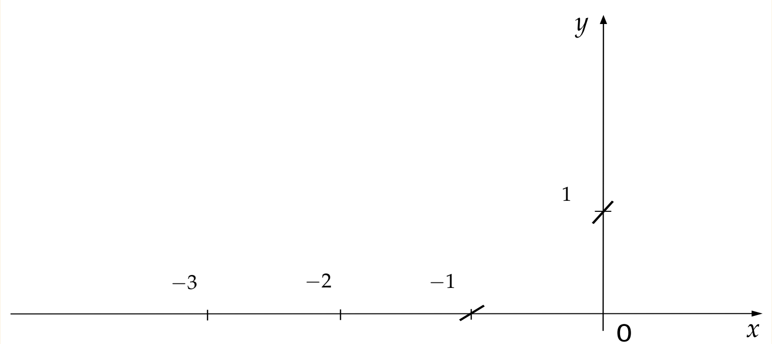

Označíme průsečík s osou $x$: $x = -1$. Funkce v tomto bodě roste.

| $-$ $+$ | $\searrow$ min $\nearrow$ | $\cap$ in. $\cup$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $-2$ | $-3$ |

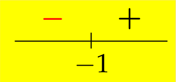
$\color{red}{f(0) = 1}$
$f(-1) = 0$

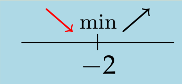
$f(-2) \doteq -0.14$
$f(-3) \doteq -0.01$

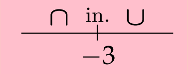
$f(+\infty) = \infty$
$f(-\infty) = 0$




Označíme průsečík s osou $y$: $y = 1$. Funkce v tomto bodě roste.



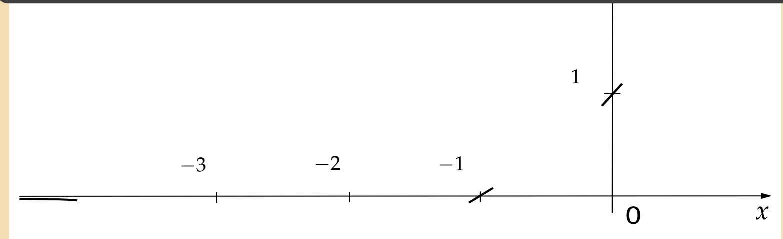



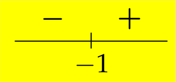

$f(0) = 1$
$f(-1) = 0$

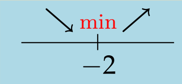
$f(-2) \doteq -0.14$
$f(-3) \doteq -0.01$

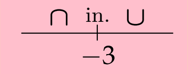
$f(+\infty) = \infty$
$f(-\infty) = 0$

Nakreslíme značky v blízkosti asymptoty v $-\infty$. Je třeba si uvědomit, že v blízkosti $-\infty$ je funkce záporná a klesající, proto bude graf pod asymptotou.





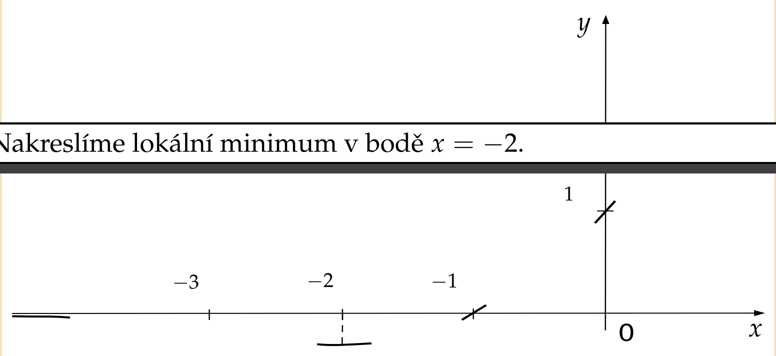



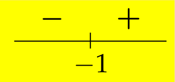

$f(0) = 1$
$f(-1) = 0$

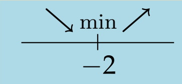
$f(-2) \doteq -0.14$
$f(-3) \doteq -0.01$

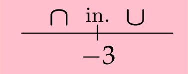
$f(+\infty) = \infty$
$f(-\infty) = 0$




Nakreslíme lokální minimum v bodě $x = -2$.



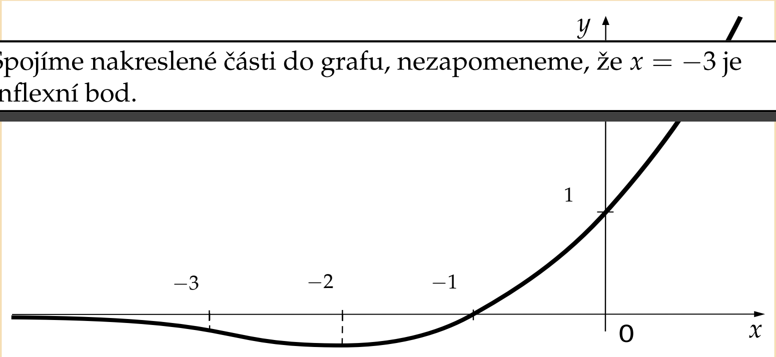




$f(0) = 1$
$f(-1) = 0$

$f(-2) \doteq -0.14$
$f(-3) \doteq -0.01$

$f(+\infty) = \infty$
$f(-\infty) = 0$




Spojíme nakreslené části do grafu, nezapomeneme, že $x = -3$ je inflexní bod.

**Vyšetřete průběh funkce** $y = \dfrac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

Určíme definiční obor z podmínky

$$x - 1 \neq 0.$$

Platí

$$x \neq 1.$$

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

$$y(0) = \frac{2(0 - 0 + 1)}{(0-1)^2} = 2$$

- Určíme průsečík s osou $y$.
- Dosadíme $x = 0$ a hledáme $y(0)$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$,

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = 0$$

- Určíme průsečík s osou $x$.
- Dosadíme $y = 0$ a řešíme rovnici

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2,$

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = 0$$
$$x^2 - x + 1 = 0$$

Čitatel musí být nula.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = 0$$
$$x^2 - x + 1 = 0$$

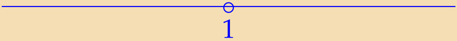
Tato kvadratická rovnice nemá řešení, protože ve vzorci

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

obdržíme záporný diskriminant.

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4.1.1 = -3 < 0$$

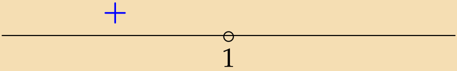
$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$




Nakreslíme osu $x$ a bod nespojitosti $x = 1$.

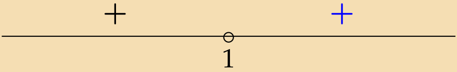
$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$




Víme, že $y(0) = 2 > 0$. Funkce je kladná na $(-\infty, 1)$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$




Vypočteme $y(2) = \dfrac{2(4-2+1)}{(2-1)^2} > 0$. Funkce je kladná na $(1, \infty)$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$+$ $\quad$ $+$

$1$

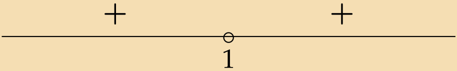
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

Určíme jednostranné limity v bodě nespojitosti

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

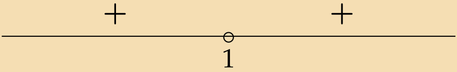



$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0} \right\|$$

Dosadíme $x = 1$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$




$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0_+} \right\|$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0_+} \right\|$$

Jmenovatel je v obou případech kladné číslo.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

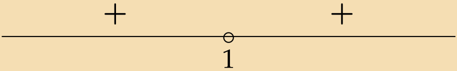
| $+$ | $1$ | $+$ |
|---|---|---|

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0_+} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0_+} \right\| = +\infty$$

Přímka $x = 1$ je tedy asymptotou bez směrnice.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$




$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0_+} \right\| = +\infty$$

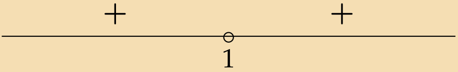
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0_+} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

Určíme limity v $\pm\infty$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$




$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0_+} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0_+} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} =$$

Uvažujeme jenom vedoucí členy.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

| $+$ | $\circ$ | $+$ |
|---|---|---|
| | $1$ | |

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0_+} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0_+} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1} = 2$$

Funkce má limitu v $\pm\infty$. Vodorovná přímka $y = 2$ je asymptotou ke grafu v bodech $\pm\infty$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$y' = 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}\right)'$$

Vypočteme derivaci.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$y' = 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}\right)'$$
$$= 2\frac{(2x-1)(x-1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x-1)(1-0)}{((x-1)^2)^2}$$

- Užijeme vzorec pro derivaci podílu.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

- Užijeme vzorec pro derivaci složené funkce při derivování výrazu $(x-1)^2$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$\begin{aligned}
y' &= 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}\right)' \\
&= 2\frac{(2x-1)(x-1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x-1)(1-0)}{((x-1)^2)^2} \\
&= 2(x-1)\frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)2}{(x-1)^4}
\end{aligned}$$

Vytkneme $(x-1)$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$\begin{aligned} y' &= 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}\right)' \\ &= 2\frac{(2x-1)(x-1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x-1)(1-0)}{((x-1)^2)^2} \\ &= 2(x-1)\frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)2}{(x-1)^4} \\ &= 2\frac{2x^2 - 2x - x + 1 - (2x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Roznásobíme závorky a zkrátíme $(x-1)$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$\begin{aligned}
y' &= 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}\right)' \\
&= 2\frac{(2x-1)(x-1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x-1)(1-0)}{((x-1)^2)^2} \\
&= 2(x-1)\frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)2}{(x-1)^4} \\
&= 2\frac{2x^2 - 2x - x + 1 - (2x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^3} \\
&= 2\frac{-x-1}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

Upravíme čitatel.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$\begin{aligned}
y' &= 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}\right)' \\
&= 2\frac{(2x-1)(x-1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x-1)(1-0)}{((x-1)^2)^2} \\
&= 2(x-1)\frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)2}{(x-1)^4} \\
&= 2\frac{2x^2 - 2x - x + 1 - (2x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^3} \\
&= 2\frac{-x-1}{(x-1)^3} = -2\frac{x+1}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

Derivace.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

$$-2\frac{x+1}{(x-1)^3} = 0$$

Řešíme rovnici $y' = 0$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

$$-2\frac{x+1}{(x-1)^3} = 0$$

$$x + 1 = 0$$

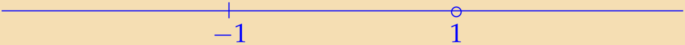
$$x = -1$$

Čitatel musí být nula. Stacionárním bodem je tedy $x = -1$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3} \qquad x_1 = -1$$




Zakreslíme stacionární bod a bod nespojitosti.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

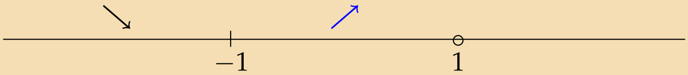
$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3} \qquad x_1 = -1$$


$$y'(-2) = -2\frac{-2+1}{(-2-1)^3} = -2\frac{\text{záporná hodnota}}{\text{záporná hodnota}} < 0$$

Funkce na intervalu $(-\infty, -1)$ klesá.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3} \qquad x_1 = -1$$

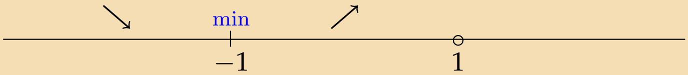



$$y'(0) = -2\frac{0+1}{(0-1)^3} = -2\frac{\text{kladná hodnota}}{\text{záporná hodnota}} > 0$$

Funkce na intervalu $(-1, 1)$ roste.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3} \qquad x_1 = -1 \ldots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

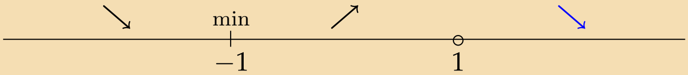



Lokální minimum pro $x = -1$. Funkční hodnota je

$$y(-1) = \frac{2((-1)^2 - (-1) + 1)}{(-1-1)^2} = \frac{2.3}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ $\quad x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$




$$y'(2) = -2\frac{2+1}{(2-1)^3} = -2\frac{3}{1} < 0$$

Funkce na intervalu $(1, \infty)$ klesá.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3} \qquad x_1 = -1 \ldots \text{lok. minimum}, \ y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = -2\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)'$$

Vypočteme druhou derivaci.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3} \qquad x_1 = -1 \ldots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -2\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)' \\ &= -2\frac{1(x-1)^3 - (x+1)3(x-1)^2(1-0)}{((x-1)^3)^2} \end{aligned}$$

- Použijeme pravidlo pro derivaci podílu.
- Jmenovatel budeme derivovat jako složenou funkci.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3}$$ $x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} y'' &= -2\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)' \\ &= -2\frac{1(x-1)^3 - (x+1)3(x-1)^2(1-0)}{((x-1)^3)^2} \\ &= -2(x-1)^2\frac{(x-1)-(x+1)3}{(x-1)^6} \end{aligned}$$

Vytkneme $(x-1)^2$ v čitateli.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ $\quad x_1 = -1\ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
y'' &= -2\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)' \\
&= -2\frac{1(x-1)^3 - (x+1)3(x-1)^2(1-0)}{((x-1)^3)^2} \\
&= -2(x-1)^2\frac{(x-1)-(x+1)3}{(x-1)^6} \\
&= -2\frac{-2x-4}{(x-1)^4}
\end{aligned}$$

Upravíme.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ $\quad x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned} y'' &= -2\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)' \\ &= -2\frac{1(x-1)^3 - (x+1)3(x-1)^2(1-0)}{((x-1)^3)^2} \\ &= -2(x-1)^2\frac{(x-1) - (x+1)3}{(x-1)^6} \\ &= -2\frac{-2x-4}{(x-1)^4} = 4\frac{x+2}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

Obdrželi jsme druhou derivaci.

$\boxed{y = \dfrac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ $\quad x_1 = -1 \dots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$y'' = 4\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$

$$4\frac{x+2}{(x-1)^4} = 0$$

Řešíme $y'' = 0$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ $\quad x_1 = -1\ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$y'' = 4\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$ $\quad x_2 = -2$

$$4\frac{x+2}{(x-1)^4} = 0$$

$$x + 2 = 0$$

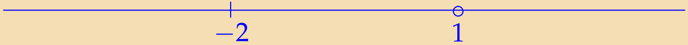
$$x = -2$$

Jediné řešení je $x = -2$.

$\boxed{y = \dfrac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ $\quad x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$y'' = 4\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$ $\quad x_2 = -2$




Určíme intervaly konvexnosti a konkavity.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3} \qquad x_1 = -1 \ldots \text{lok. minimum, } y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4\frac{x+2}{(x-1)^4} \qquad x_2 = -2$$

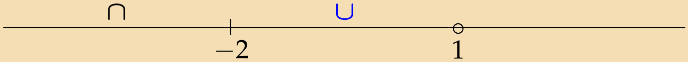

$$y''(-3) = 4\frac{-3+2}{\text{kladná hodnota}} < 0$$

Funkce je na intervalu $(-\infty, -2)$ konkávní.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ $\quad x_1 = -1\ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$y'' = 4\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$ $\quad x_2 = -2$



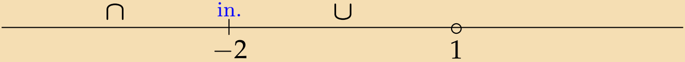

$$y''(0) = 4\frac{0+2}{\text{kladná hodnota}} > 0$$

Funkce je na intervalu $(-2, 1)$ konvexní.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ $\quad x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$y'' = 4\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$ $\quad x_2 = -2$




Inflexní bod v bodě $x = -2$. Funkční hodnota je

$$y(-2) = \frac{2((-2)^2 - (-2) + 1)}{(-2-1)^2} = \frac{14}{9}.$$

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průsečík s osou $x$

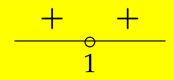
$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ $\quad x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

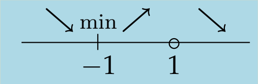
$y'' = 4\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$ $\quad x_2 = -2$

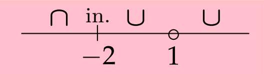
| $\cap$ | in. | $\cup$ | | $\cup$ |
|---|---|---|---|---|
| | $-2$ | | $1$ | |

$$y''(2) = 4\frac{2+1}{\text{kladná hodnota}} > 0$$

Funkce je na intervalu $(1, \infty)$ konvexní.




$f(0) = 2$

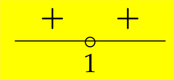
$f(\pm\infty) = 2$

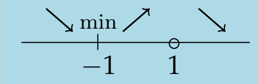
$f(1\pm) = +\infty$

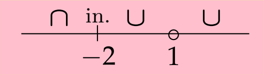
$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

$f(-2) = \dfrac{14}{9}$

Shrneme dosavadní znalosti.



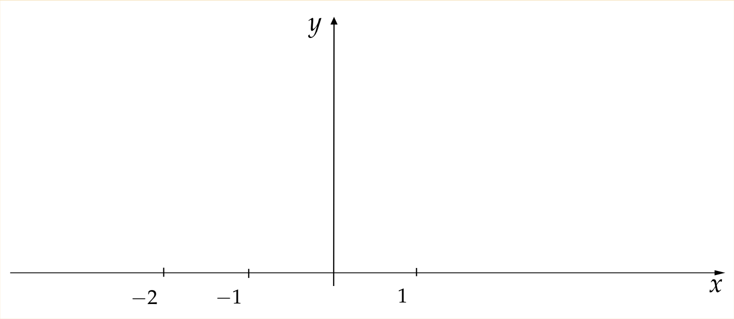

$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

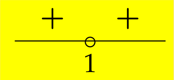
$f(1\pm) = +\infty$

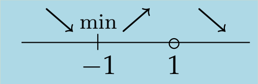
$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

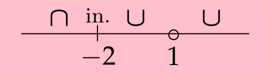
$f(-2) = \dfrac{14}{9}$




Nakreslíme souřadnou soustavu.



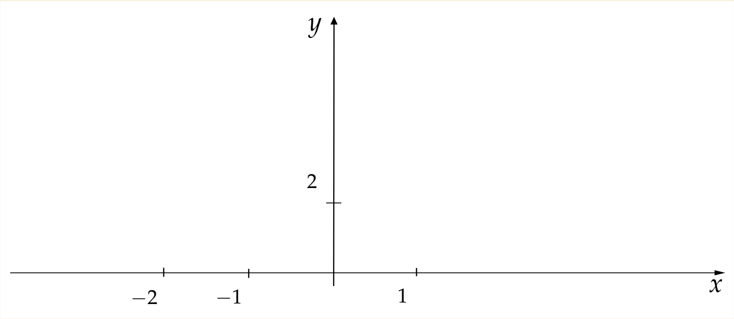

$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

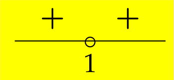
$f(1\pm) = +\infty$

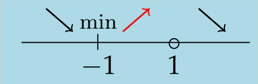
$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

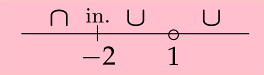
$f(-2) = \dfrac{14}{9}$




Vyznačíme průsečík s osou $y$.



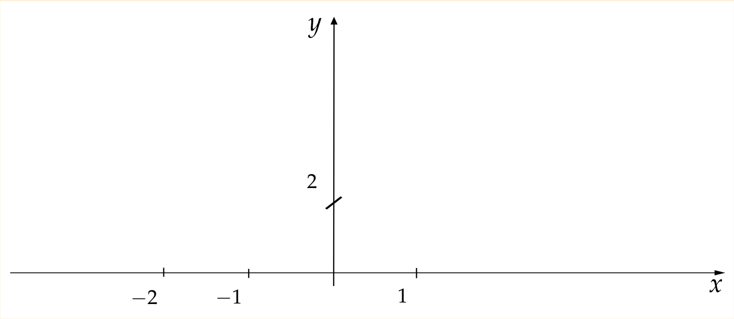

$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

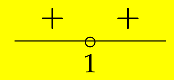
$f(1\pm) = +\infty$

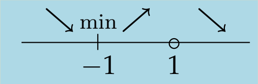
$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

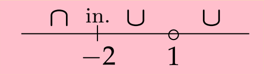
$f(-2) = \dfrac{14}{9}$




Funkce v tomto bodě roste.



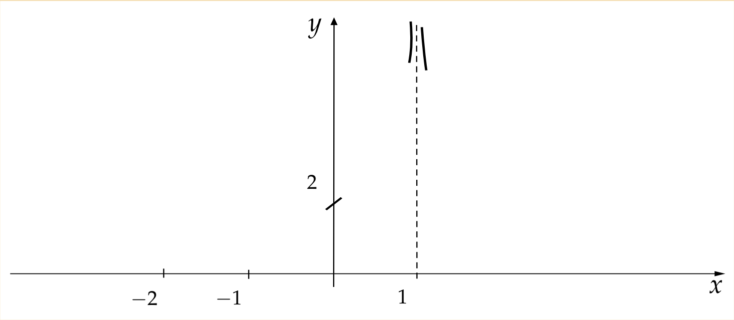

$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

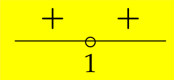
$f(1\pm) = +\infty$

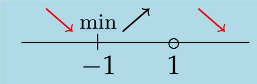
$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

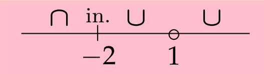
$f(-2) = \dfrac{14}{9}$




Nakreslíme funkci v okolí svislé asymptoty.



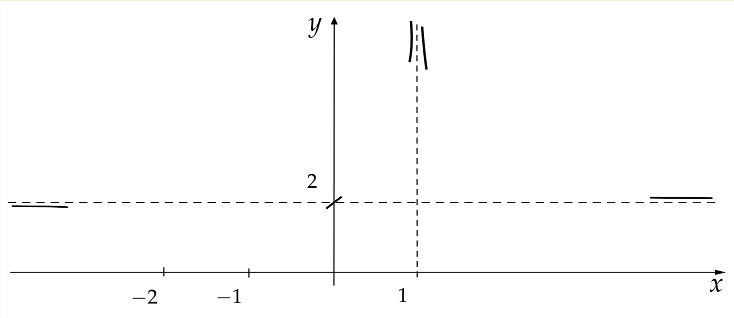

$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

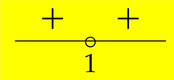
$f(1\pm) = +\infty$

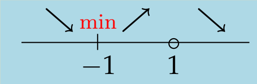
$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

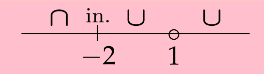
$f(-2) = \dfrac{14}{9}$




Nakreslíme funkci v okolí vodorovné asymptoty.



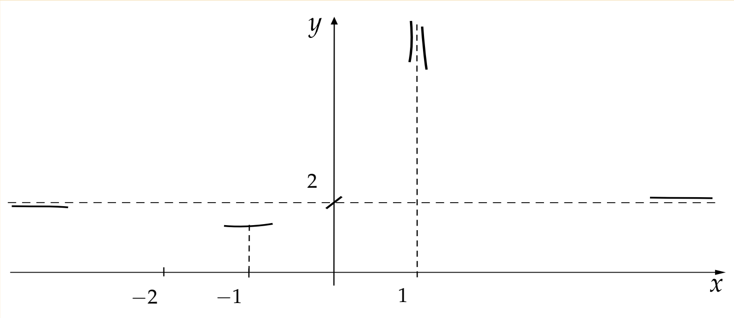

$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

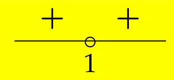
$f(1\pm) = +\infty$

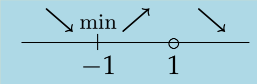
$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

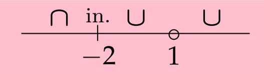
$f(-2) = \dfrac{14}{9}$




Nakreslíme lokální minimum funkce.



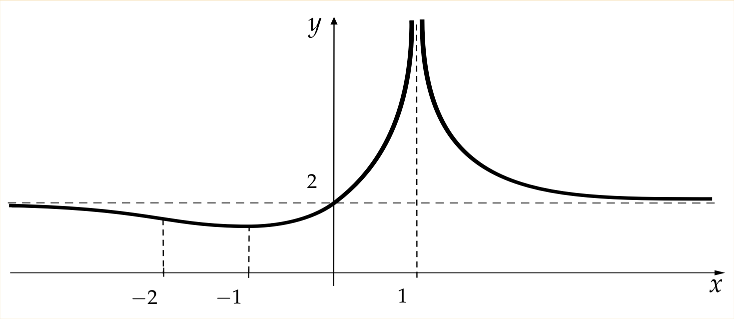

$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

$f(1\pm) = +\infty$

$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

$f(-2) = \dfrac{14}{9}$




Při náčrtku funkce nezapomeneme, že $-2$ je inflexní bod.

**Vyšetřete průběh funkce** $y = \ln\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)} \quad D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty);$$

Funkce $y(x)$ je definována pro $x + 2 \neq 0$ a $\dfrac{x^2}{x+2} > 0$.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

Plyne z nesymetričnosti definičního oboru.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$y = 0$

Hledáme průsečíky s osou $x$. Funkce nemá průsečík s osou $y$, jelikož osa $y$ je daná předpisem $x = 0$ a 0 není součástí $D(f)$.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0$$

Položíme funkci $y(x)$ rovnu $0$ .

$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

Odlogaritmujeme: $0 = \ln 1$

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2,0) \cup (0,\infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

Vynásobíme jmenovatelem $x + 2$ a dostaneme kvadratickou rovnici.

$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Převedeme na levou stranu,

$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

podle vzorce vypočítáme kořeny.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_1 = 2 \in D(f)$$

Kořen $x_1 = 2$ leží v definičním oboru funkce.

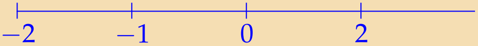
$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$\begin{aligned} x^2 &= x + 2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ x_1 &= 2 \in D(f) \\ x_2 &= -1 \in D(f) \end{aligned}$$

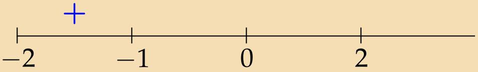
Kořen $x_2 = -1$ leží v definičním oboru funkce.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;



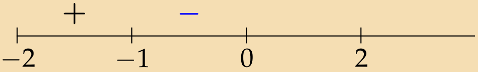

Na reálnou osu naneseme nulové body a body, kde funkce není definována.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;




- Dosadíme bod z intervalu $(-2, -1)$ a zjistíme znaménko funkce.
- $y\left(-\frac{3}{2}\right) = \ln \frac{(-\frac{3}{2})^2}{-\frac{3}{2}+2} = \ln \frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}} = \ln \frac{9}{2} = \ln 9 - \ln 2 > 0$

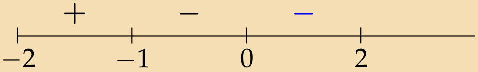
$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;




- Dosadíme bod z intervalu $(-1, 0)$ a zjistíme znaménko funkce.
- $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln \dfrac{(-\frac{1}{2})^2}{-\frac{1}{2}+2} = \ln \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \ln \dfrac{1}{6} = -\ln 6 < 0$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;




- Dosadíme bod z intervalu $(0, 2)$ a zjistíme znaménko funkce.
- $y(1) = \ln \dfrac{1^2}{1+2} = \ln \dfrac{1}{3} = -\ln 3 < 0$

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2,0) \cup (0,\infty)$; není ani sudá ani lichá;

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | |

- Dosadíme bod z intervalu $(2,\infty)$ a zjistíme znaménko funkce.
- $y(3) = \ln\dfrac{3^2}{3+2} = \ln\dfrac{9}{5} = \ln 9 - \ln 5 > 0$

$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Vypočteme limitu funkce v $+\infty$.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Podle věty o limitě složené funkce zaměníme pořadí limity a logaritmu. Limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1}$$

Pro řešení limity použijeme např. L'Hospitalovo pravidlo.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

Funkce $\ln x$ pro $x \to \infty$ diverguje.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Chování funkce na levém okraji definičního oboru určíme výpočtem limity funkce v bodě $-2$ zprava.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Zaměníme pořadí limity a logaritmu,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \left\| \frac{4}{0_+} \right\|$$

a dostáváme limitu typu $\left\| \dfrac{4}{0_+} \right\|$,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \|\ln\infty\| = \infty$$

což je nekonečno a $\ln\infty = \infty$.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \| \ln \infty \| = \infty$$

$$\lim_{x\to 0_\pm} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Chování funkce v okolí dalšího nedefinovaného bodu 0 určíme výpočtem limity funkce v bodě 0 zprava a zleva.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to-2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \| \ln \infty \| = \infty$$

$$\lim_{x\to0_\pm} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to0_\pm} \left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Zaměníme pořadí limity a logaritmu.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2,0) \cup (0,\infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \| \ln \infty \| = \infty$$

$$\lim_{x\to 0_\pm} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to 0_\pm} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \left\| \frac{0_+}{2} \right\|$$

V čitateli dostaneme číslo z pravého okolí nuly, tj. typ $\left\| \dfrac{0_+}{2} \right\|$,

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln\left\|\frac{4}{0_+}\right\| = \|\ln\infty\| = \infty$$

$$\lim_{x\to 0_\pm} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to 0_\pm}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln\left\|\frac{0_+}{2}\right\| = -\infty$$

proto lze dosadit do logaritmu, který je definován pouze pro pravé okolí nuly.

$\boxed{y = \ln\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)}$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

Dostali jsme tedy:

$$\lim_{x \to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \infty, \quad \lim_{x \to 0_\pm} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = -\infty.$$

Přímky $x = -2$ a $x = 0$ jsou asymptotami bez směrnice. Asymptotou se směrnicí pro $x \to \infty$ se budeme zabývat později.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+2}{x^2}\,\frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2}$$

Funkce $y(x)$ je složená, proto nejdříve derivujeme vnější složku

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2}$$

a násobíme derivací vnitřní složky. Tu derivujeme jako podíl.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+2}{x^2}\,\frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\,\frac{x^2+4x}{x+2} \end{aligned}$$

Zelené části se zkrátí,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+2}{x^2}\,\frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\,\frac{x^2+4x}{x+2} \\ &= \frac{x(x+4)}{x^2(x+2)} \end{aligned}$$

v čitateli vytkneme $x$

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+2}{x^2}\,\frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\,\frac{x^2 + 4x}{x+2} \\ &= \frac{x(x+4)}{x^2(x+2)} \\ &= \frac{x+4}{x(x+2)} \end{aligned}$$

a zkrátíme.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$$

$$y' = 0$$

Hledáme stacionární body.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$$

$$y' = 0$$

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = 0$$

Dosadíme vypočtenou derivaci funkce.

$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$$

$$y' = 0$$

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = 0$$

$$x + 4 = 0$$

Zlomek je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeho čitatel.

$\boxed{y = \ln\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)}$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

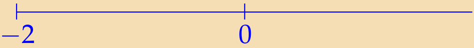
$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$$

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ \frac{x+4}{x(x+2)} &= 0 \\ x+4 &= 0 \\ x = -4 &\notin D(f) \end{aligned}$$

Vypočtená hodnota neleží v definičním oboru funkce, proto funkce nemá žádný stacionární bod.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

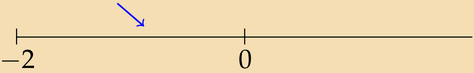
$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$$




Znaménko derivace se tedy může měnit jen v bodech, kde není definována.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

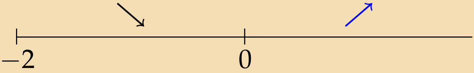
$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$$




$$\boxed{y(-1) = \frac{-1+4}{-1(-1+2)} = \frac{3}{-1} < 0, \text{ funkce na intervalu } (-2, 0) \text{ klesá.}}$$

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$$




$$\boxed{y(1) = \frac{1+4}{1(1+2)} > 0, \text{ funkce na intervalu } (0, \infty) \text{ roste.}}$$

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$$

$$y'' = \left(\frac{x+4}{x(x+2)}\right)'$$

Druhou derivaci dostaneme derivací první,

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$$

$$y'' = \left(\frac{x+4}{x(x+2)}\right)'$$
$$= \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2}$$

kterou derivujeme jako podíl.

$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x+4}{x(x+2)}\right)' \\ &= \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 2x^2 - 8x - 2x - 8}{x^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

V čitateli nelze nic vytknout, proto jej roznásobíme

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x+4}{x(x+2)}\right)' \\ &= \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 2x^2 - 8x - 2x - 8}{x^2(x+2)^2} \\ &= -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

a příslušné mocniny sečteme.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}\quad D(f) = (-2,0) \cup (0,\infty);\text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$y'' = 0$$

Hledáme inflexní body.

$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

Dosadíme vypočtenou druhou derivaci funkce.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \qquad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= 0 \\ -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} &= 0 \\ x^2+8x+8 &= 0 \end{aligned}$$

Zlomek je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeho čitatel.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= 0 \\ -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} &= 0 \\ x^2+8x+8 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-8 \pm \sqrt{64-32}}{2} \end{aligned}$$

Podle vzorce vypočítáme kořeny kvadratické rovnice.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \qquad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

$$x^2 + 8x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-32}}{2}$$

$$x_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{2}$$

Upravíme.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$x_1$ není inflexní bod, protože neleží v definičním oboru funkce,

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \qquad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

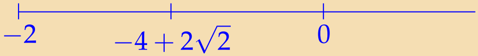
$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$

$x_2$ leží v definičním oboru funkce.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \qquad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$
$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$

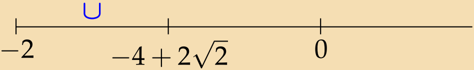



Znaménko druhé derivace se tedy může měnit jen v bodech, kde není definována a v bodě $x_2 = -4 + 2\sqrt{2}$.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \qquad y'' = -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$
$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$




$$\boxed{y''(-1,5) = -\frac{2,25 - 12 + 8}{\text{kladná hodnota}} > 0, \text{ funkce je na intervalu } (-2, -4+2\sqrt{2}) \text{ konvexní.}}$$

$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}$ $\quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$
$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$

$$\begin{array}{ccccc} & \cup & & \cap & \\ -2 & & -4+2\sqrt{2} & & 0 \end{array}$$

$y''(-1) = -\frac{1-8+8}{\text{kladná hodnota}} < 0$, funkce je na intervalu $(-4+2\sqrt{2}, 0)$ konkávní.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \qquad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$
$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$

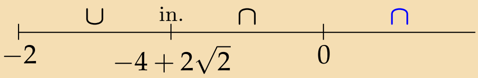
$$\begin{array}{ccccccc} & \cup & & \text{in.} & & \cap & \\ \vdash & \text{———} & + & \text{———} & + & \text{———} \\ -2 & & -4+2\sqrt{2} & & 0 & & \end{array}$$

$x_2$ je inflexním bodem,

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \qquad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$
$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$




$y''(1) = -\dfrac{1+8+8}{\text{kladná hodnota}} < 0$, funkce je na intervalu $(0, \infty)$ konkávní.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

Vrátíme se nyní k asymptotě se směrnicí.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

Vrátíme se nyní k asymptotě se směrnicí.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}{x}$$

Pro $x \to \infty$ hledáme asymptotu se směrnicí ve tvaru $y = kx + q$.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \quad y'' = -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2}$$

Vrátíme se nyní k asymptotě se směrnicí.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}{x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

Víme z předchozího výpočtu, že $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$.

$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

Vrátíme se nyní k asymptotě se směrnicí.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}{x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x(x+2)} = 0.$$

Řešíme pomocí L'Hospitalova pravidla, $y'$ známe.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

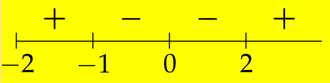
$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)} \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}$$

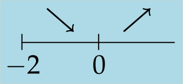
Vrátíme se nyní k asymptotě se směrnicí.

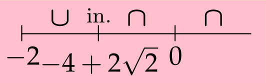
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}{x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x(x+2)} = 0.$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) - 0\cdot x\right) = \infty.$$

Asymptota se směrnicí pro $x \to \infty$ neexistuje.




$f(-1) = 0$

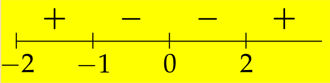
$f(2) = 0$

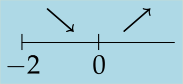
$f(\infty) = \infty$

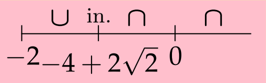
$f(0\pm) = -\infty$

$f(-4+2\sqrt{2}) \doteq 0.505$

Vypíšeme nejdůležitější výsledky.



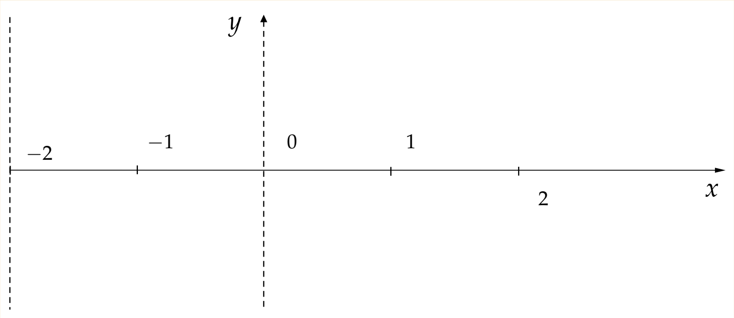



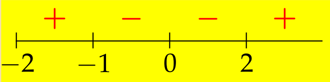

$f(-1) = 0$
$f(2) = 0$

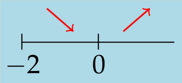
$f(\infty) = \infty$
$f(0\pm) = -\infty$

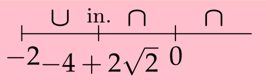
$f(-4+2\sqrt{2}) \doteq 0.505$




Zakreslíme souřadný systém. Pro hodnoty menší nebo rovny -2 a v 0 funkce není definována.



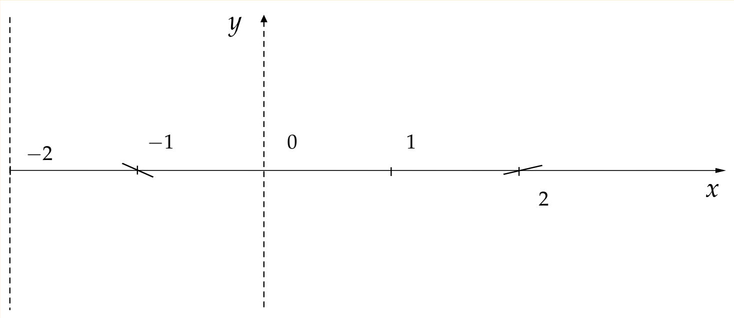

$f(-1) = 0$

$f(2) = 0$

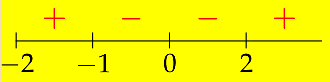
$f(\infty) = \infty$

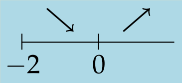
$f(0\pm) = -\infty$

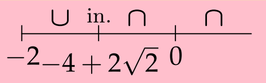
$f(-4+2\sqrt{2}) \doteq 0.505$




Vyznačíme průsečíky s osou $x$. Funkce klesá v bodě -1 a roste v bodě 2.



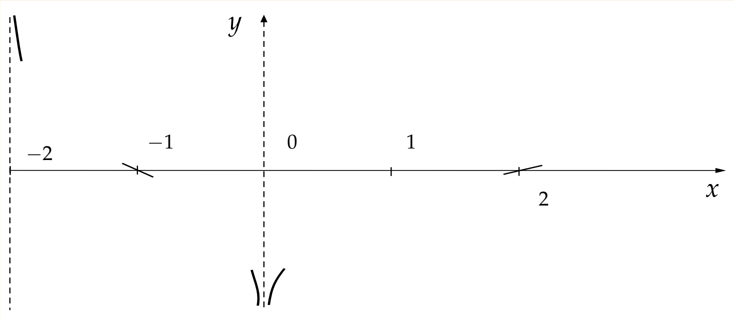



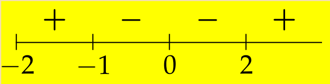

$f(-1) = 0$
$f(2) = 0$

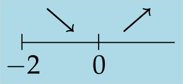
$f(\infty) = \infty$
$f(0\pm) = -\infty$

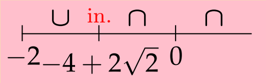
$f(-4+2\sqrt{2}) \doteq 0.505$




Nakreslíme funkci v okolí svislých asymptot.



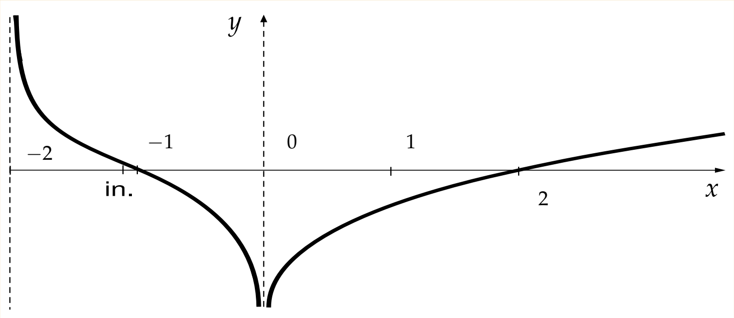




$f(-1) = 0$
$f(2) = 0$

$f(\infty) = \infty$
$f(0\pm) = -\infty$

$f(-4+2\sqrt{2}) \doteq 0.505$




Vyznačíme inflexní bod a spojíme graf.